

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра теории упругости и вычислительной математики
имени академика А.С. Космодамианского

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П. А. Машаров
«17» апреля 2025 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы	Прикладная математика и информатика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины «**Математические модели и методы теории упругости**» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (Профиль: Прикладная математика и информатика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 9 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры теории упругости
и вычислительной математики
им. акад. А.С. Космодамианского,
доктор физ.-мат. наук, профессор

С. А. Калоеров

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского.

Протокол от 03.04.2025 г. № 10.

И.о. заведующего кафедрой

И. А. Моисеенко

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и
информационных технологий
16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.
Протокол от 16.04.2025 г. № 3.

Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, доц.
03.04.2025 г.

Р. Н. Нескороев

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной дисциплины программы бакалавриата:

Математический анализ, Дифференциальные уравнения, Уравнения математической физики, Комплексный анализ, Численные методы.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Математические модели деформирования сред с усложненными свойствами.

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.02 Прикладная математика и информатика (Профиль: Прикладная математика и информатика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ОД.6 Математические модели и методы теории упругости
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор вуза
Количество зачетных единиц / всего часов	4 / 144

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	3	6	45	30	-	69	144	экзамен

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение основ классической математической теории упругости, подходов абстрагирования при изучении реальных процессов, моделей деформируемой среды, методов составления и решения краевых задач при использовании различных моделей, методов численной реализации решений на современных вычислительных средствах.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ПК-5. Способен проводить исследования и получать научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива.

4.2. Индикаторы компетенций

ПК-5.1. Применяет математические модели и методы теории упругости для решения задач научно-исследовательской и профессиональной деятельности.

4.3. Результаты обучения

ПК-5.1.1. Знает определения и утверждения, математические модели и методы теории упругости для решения задач научно-исследовательской и профессиональной деятельности.

ПК-5.1.2. Умеет выбирать и использовать математические модели и методы теории упругости для решения задач научно-исследовательской и профессиональной деятельности.

ПК-5.1.3. Аргументированно выбирает математические модели и методы теории упругости для решения задач научно-исследовательской и профессиональной деятельности.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Основные соотношения и краевые задачи классической теории упругости	
Введение в теорию упругости	1. Законы движения и равновесия материальных тел. 2. Деформирование, упругость. 3. Теория упругости, этапы ее развития. 4. Математические методы теории упругости, их применение и направления развития.
Теория напряжений	1. Понятие напряжения, тензора напряжения. 2. Соотношения Коши. 3. Дифференциальные уравнения равновесия упругого тела, уравнения движения. 4. Нормальные и касательные напряжения. 5. Поверхности нормальных напряжений Коши, главные нормальные напряжения, инварианты тензора напряжений. 6. Наибольшие касательные напряжения.
Теория деформаций	1. Деформация по данному направлению, геометрический смысл различных деформаций. 2. Малые деформации, тензор деформаций, поверхности деформаций Коши. 3. Главные деформации, инварианты тензора деформаций и их геометрическая интерпретация. 4. Определение перемещений по малым деформациям. 5. Условия совместности Сен-Венана.
Уравнения закона Гука	1. Уравнения обобщенного закона Гука. 2. Уравнения закона Гука для частных случаев анизотропии.

	3. Уравнения закона Гука для изотропного тела
Основные задачи теории упругости	1. Уравнения в перемещения Навье-Ламе. 2. Уравнения в напряжениях Бельтрами-Митчела. 3. Основные задачи теории упругости.
Теоремы теории упругости	1. Упругий потенциал. 2. Вариационные принципы теории упругости. 3. Теоремы Клайперона. 4. Теорема о единственности упругого решения. 5. Принцип Кастильяно. 6. Вариационные методы решения задач теории упругости. 7. Принцип Сен-Венана.
Раздел 2. Плоская задачи теории упругости и ее решение с помощью комплексных потенциалов	
Плоская задача теории упругости	1. Плоская задача теории упругости изотропного тела 2. Функция напряжений и краевые условия для ее определения. 3. Решение частных задач.
Приложение теории функций комплексного переменного к решению плоской задачи	1. Приложение теории функций комплексного переменного к решению плоской задачи. 2. Комплексные потенциалы теории упругости 3. Выражения напряжений и перемещений через комплексные потенциалы 4. Граничные условия и их определения, 5. Общий вид комплексных потенциалов для многосвязной области.
Решения частных задач для пластинки с круговыми контурами	1. Замкнутые решения плоских задач. 2. Решение задач Кирша, Ламе 3. Решение задач для пластинки с круговым упругим ядром. 4. Решение задач для пластинки с 2 круговыми отверстиями методами рядов, коллокаций и обобщенным методом наименьших квадратов
Использование интегралов типа Коши при решении задач	1. Интегралы типа Коши и их вычисление. 2. Замкнутое решение задачи для пластинки с эллиптическим отверстием.
Решение задач для многосвязных областей обобщенным методом наименьших квадратов	1. Решение задачи для пластинки с произвольным набором эллиптических отверстий обобщенным методом наименьших квадратов.

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 3, семестр – 6

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лек.	Лаб.	Прак.	СРС +К	Всего
Раздел 1. Основные соотношения и краевые задачи классической теории упругости	19	8	-	29	56

Введение в теорию упругости	2		-		2
Теория напряжений	6	4	-	7	17
Теория деформаций	3	2	-	5	10
Уравнения закона Гука	2	2	-	7	11
Основные задачи теории упругости	4		-	5	9
Теоремы теории упругости	2		-	5	7
Раздел 2. Плоская задачи теории упругости и ее решение с помощью комплексных потенциалов	26	22	-	40	88
Плоская задача теории упругости.	3	2	-	6	11
Приложение теории функций комплексного переменного к решению плоской задачи	5	4	-	7	16
Решения частных задач для пластинки с круговыми контурами	6	6	-	10	22
Использование интегралов типа Коши при решении задач	6	4	-	10	20
Решение задач для многосвязных областей обобщенным методом наименьших квадратов	6	6	-	7	19
ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОП	45	30	-	69	144

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Раздел 1. Основные соотношения и краевые задачи классической теории упругости

1. Уравнения равновесия и уравнения закона Гука в случае плоской задачи теории упругости анизотропного тела.
2. Понятие напряжения, тензора напряжения.
3. Соотношения Коши для напряжений.
4. Дифференциальные уравнения равновесия упругого тела.
5. Нормальные напряжения, их выражения через основные напряжения.
6. Поверхности нормальных напряжений Коши
7. Главные нормальные напряжения, инварианты тензора напряжений.
8. Деформация по данному направлению.
9. Малые деформации, тензор деформаций.
10. Главные деформации, инварианты тензора деформаций и их геометрическая интерпретация.
11. Условия совместности Сен-Венана
12. Уравнения обобщенного закона Гука.
13. Уравнения закона Гука для частных случаев анизотропии.
14. Уравнения закона Гука для изотропного тела
15. Уравнения в перемещения Навье-Ламе
16. Уравнения в напряжениях Бельтрами-Митчела.
17. Основные задачи теории упругости.
18. Упругий потенциал, различные его формы.
19. Теоремы Клайперона
20. Теорема о единственности упругого решения.
21. Теорема Бетти.
22. Принцип Кастильяно. Вариационные методы решения задач теории упругости.

23. Принцип Сен-Венана

24. Плоская деформация и обобщенное плоское напряженное состояние.

25. Как получается дифференциальное уравнение для функции Эйри и какой вид они имеет.

Раздел 2. Плоская задачи теории упругости и ее решение с помощью комплексных потенциалов

26. Как вводятся комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости анизотропного тела.

27. Приведите формулы для нахождения напряжений и перемещений через комплексные потенциалы.

28. Приведите граничные условия для определения комплексных потенциалов в случае первой и второй основных задач.

29. Какой вид имеют комплексные потенциалы в самом общем случае.

30. Каков общий вид комплексных потенциалов в случае пластинки с эллиптическими отверстиями.

31. Как решается задача для пластинки с отверстиями при использовании обобщенного метода наименьших квадратов.

32. Функция напряжений, дифференциальное уравнение и граничные условия ее нахождения.

33. Комплексные потенциалы плоской задачи теории упругости изотропного тела.

34. Выражения для напряжений и перемещений. Граничные условия.

35. Выражения для главного вектора и главного момента внутренних усилий по дуге внутри тела.

36. Общий вид комплексных потенциалов для конечной и бесконечной многосвязной области

37. Метод рядов и его приложение к решению задачи Кирша и Ламе.

38. Схема решения задачи методом рядов задач для пластинки с двумя круговыми отверстиями

39. Схема решения задачи методом рядов задач для пластинки с периодической системой круговых отверстий

40. Схема решения задачи методом рядов задач для пластинки с двоякопериодической системой круговых отверстий.

41. Метод интегралов типа Коши в теории упругости. Решение методом интегралов типа Коши задачи для пластинки с эллиптическим отверстием

42. Решение задач методом коллокаций

43. Решение задач дискретным методом наименьших квадратов

44. Решение задач обобщенным методом наименьших квадратов

7.2. Темы докладов (рефератов)

1. Общие представления комплексных потенциалов для бесконечной многосвязной изотропной пластинки с отверстиями.

2. Определение комплексных потенциалов обобщенным методом наименьших квадратов.

3. Решение методом интегралов типа Коши задачи для бесконечной пластинки с круговым отверстием под действием сосредоточенной силы.

7.3. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

Образец задания модульного контроля

Модульная контрольная работа

Вариант № n

1. Вывод системы дифференциальных уравнений равновесия упругого тела
2. Решение задачи Коши о распределении напряжений в бесконечной пластинке с круговым отверстием

7.4. Образец содержания экзаменационного билета

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики и информационных технологий

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
 Программа подготовки: **бакалавриат**
 Семестр: **6**
 Учебная дисциплина: **Математические модели и методы теории упругости**

БИЛЕТ № xx

1. Вывод системы дифференциальных уравнений равновесия упругого тела
2. Решение задачи Коши о распределении напряжений в бесконечной пластинке с круговым отверстием

Утверждено на заседании кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, протокол № ____ от _____ года

И.о. зав. кафедрой _____ **Моисеенко И.А.**
 (подпись) (фамилия и инициалы)

Экзаменатор _____ **Калоеров С.А.**
 (подпись) (фамилия и инициалы)

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-2	Организационно-учебная работа студента в аудитории	5
	Самостоятельная работа и лабораторные работы	55
	Модульная контрольная работа	40
ИТОГО		100
Промежуточная аттестация		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале
		Экзамен
90-100	A	отлично
80-89	B	хорошо
75-79	C	
70-74	D	удовлетворительно
60-69	E	
35-59	FX	неудовлетворительно
0-34	F	

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд. 605).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. Калоеров С.А. Математическая теория упругости и некоторые ее задачи. – Донецк: ДонГУ, 2024. – 210 с.
2. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая шк., 1979. – 432 с.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. Т. 1 : Теория упругости / Л. С. Лейбензон ; АН СССР. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 468 с.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – 2-е изд. – М. : Наука, 1977. – 416 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. / Н. И. Мусхелишвили. – 5-е изд. - Москва : Наука, 1966. – 708 с. Изд. 4-е. 1954. – 647 с. Изд 3-е, 1949. – 635 с.
6. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий ; пер. с пол. Б. Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
7. Тимошенко С. П. Курс теория упругости / С. П. Тимошенко; под ред. Э.И. Григолюка. – К. : Наук. думка, 1972. – 507 с.

10.2. Дополнительная литература

8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высш. шк., 1968. – 512 с.
9. Калоеров С. А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С. А. Калоеров, Е. В. Авдюшина, А. Б. Мироненко; Донецкий нац. ун-т. – Донецк : ДонНУ, 2013. – 438 с.
10. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами: [Учеб. пособие для ун-тов и втузов] / А. С. Космодамианский. – К.: Вища шк., 1975. – 227 с.
11. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – Изд. 2 перераб. – М. Высшая школа, 1982. – 264 с. – URL: <https://dwg.ru/dnl/7463> (дата обращения: 11.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
2. Курс по физике. – URL: http://www.ph4s.ru/book_uprugost.html (дата обращения: 11.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
3. Литература по механике деформируемого твердого тела. – URL: <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mechanics/solid.htm> (дата обращения: 11.01.2024). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.
4. Научная электронная библиотека elibrary.ru : информ.-аналит. портал / ООО Научная электронная библиотека. – Москва : ООО Науч. электрон. б-ка, сор. 2000–2022. – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.01.2023). – Режим доступа: для зарегистрир. пользователей. – Текст : электронный.
5. Электронный каталог Научной библиотеки Донецкого государственного университета. – Донецк : НБ ДонГУ, 1999– . – URL: <http://catalog.donnu.education> (дата обращения: 01.01.2023). – Текст : электронный;
6. Техническая библиотека URL: <http://techlibrary.ru/> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный;

7. Научные журналы ФГБОУ ВО «ДонГУ» URL: <http://donnu.ru/science/journals> (дата обращения: 31.03.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст : электронный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДОННУ № 46484614);
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДОННУ лицензия № 46472919);
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы DreamSpark для высших учебных заведений);
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).